西安交通大学 2020–2021 学年 第 一 学期

工科数学分析 I 试卷(B 卷解析)

院 (系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

<table>
<tr><td colspan="6">试卷卷面成绩</td><td rowspan="2">课程考核成绩占 %</td><td rowspan="2">平时成绩占 %</td><td rowspan="2">课程考核成绩</td></tr>
<tr><td>题 号</td><td>一</td><td>二</td><td>三</td><td>四</td><td>小 计</td></tr>
<tr><td>得 分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

一、填空题 (共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. 函数 $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x^3}$ 的麦克劳林展开式中 x^{2021} 的系数为 $\underline{-\dfrac{1}{2021}}$.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]=\underline{\ 1\ }$.

3. 反常积分 $\displaystyle\int_1^3 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\,\mathrm{d}x=\underline{\ \ln\pi+1\ }$.

4. 设 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\underline{\dfrac{2\,\mathrm{e}^2-3\,\mathrm{e}}{4}}$.

5. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k+\dfrac{1}{n}\right)^2\tan\dfrac{1}{n^3}=\underline{\dfrac{1}{3}}$.

得分

二、单选题 (共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{2x} & ,x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & ,x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 【 C 】

(A) 连续且取极大值 (B) 凑数选项

(C) 可导且导数不为 0 (D) 可导且导数为 0

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续且 $f(0)=0$,已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 【 D 】

(A) 不可导 (B) 可导且导数不为 0

(C) 取得极大值　　　　　　　　　　　(D) 取得极小值

3. 微分方程 $y'' - y = \mathrm{e}^x + 1$ 的一个特解可设为（a, b 为常数）　【 B 】

(A) $a\,\mathrm{e}^x + b$　　(B) $ax\,\mathrm{e}^x + b$　　(C) $a\,\mathrm{e}^x + bx$　　(D) $ax\,\mathrm{e}^x + bx$

4. 函数 $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 的间断点个数是　【 D 】

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

5. 当 $x \to 0$ 时，函数 $y = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ 是　【 A 】

(A) 无界的但不是无穷大量　　　　　(B) 无穷大量

(C) 有界的但不是无穷小量　　　　　(D) 无穷小量

得分

三、计算题 (共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分)

1. 计算极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (t\sin t + \tan^3 t \cdot \ln t)\,\mathrm{d}\,t}{\cos x \int_0^x \ln^2(1+t)\,\mathrm{d}\,t}$ 的值.

解　利用 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (t\sin t + \tan^3 t \cdot \ln t)\,\mathrm{d}\,t}{\cos x \int_0^x \ln^2(1+t)\,\mathrm{d}\,t} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (t\sin t + \tan^3 t \cdot \ln t)\,\mathrm{d}\,t}{\int_0^x \ln^2(1+t)\,\mathrm{d}\,t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 2\text{ 分}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x + \tan^3 x \cdot \ln x}{\ln^2(1+x)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 5\text{ 分}$$

$$= 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 6\text{ 分}$$

□

2. 讨论函数 $f(x) = |x|^{\frac{1}{20}} + |x|^{\frac{1}{21}} - 2\cos x$ 的零点个数.

解　$f(x)$ 是偶函数，且 $f(0) = -2$，因此只需考虑 f 在 $(0, +\infty)$ 上的零点. . . . 2 分

当 $x > 1$ 时，$f(x) > 2 - 2\cos x \geqslant 0$，因此 f 在 $(1, +\infty)$ 上没有零点. . . . . .3 分

当 $x \in (0, 1)$ 时，$f'(x) > 0$，因此 f 在 $(0, 1)$ 上严格单调增，从而在该区间内至多有一个零点. 而由介值定理，$f(1) = 2 - 2\cos 1 > 0$，因此 f 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个零点. . . . . .5 分

因此 f 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个零点，从而在 $\mathbb{R}$ 内有且只有 2 个零点. . . .6 分

□

3. 求微分方程 $(y+1)y'' + (y')^2 = (1 + 2y + \ln y)y'$ 满足 $y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{1}{2}$ 的解.

解　方程不显含 x，记 $p = y'$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}$. 方程化为 . . . . .2 分

$$(y+1)p\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y} + p^2 = (1 + 2y + \ln y)p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\ 3\text{ 分}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}+\frac{p}{y+1}=\frac{1+2y+\ln y}{y+1}$$

$$p=\frac{1}{y+1}(y^2+y\ln y+C_1)$$

得到 $p=y'$ 与 y 的微分方程. ....5 分

由 $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$，得到 $C_1=0$，即 $y'=\frac{1}{y+1}(y^2+y\ln y)$，进而解得 $\ln(y+\ln y)=x+C_2$. 代入初值条件即可得到 $\ln(y+\ln y)=x$. .....6 分 □

4. 计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x^2\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$.

解 注意到 $\sin x$ 为奇函数,因此

$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x^2\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x+0=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$ .2 分

令 $x=sint$（或分母有理化也可）

$I=4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cdot\cos t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}\,t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cdot\cos t(1-\cos t)}{1-\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,t$

$=4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t-\cos^2 t\right)\mathrm{d}\,t$ ....4 分

$=4\left(1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}\right)=4-\pi$ ....6 分 □

5. 将圆周 $x^2+y^2=4x-3$ 绕 y 轴旋转一周,求所得旋转体的体积.

解 圆周方程为 $(x-2)^2+y^2=1$.

$V=\displaystyle\int_{-1}^{1}\pi\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2\mathrm{d}\,y-\int_{-1}^{1}\pi\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\mathrm{d}\,y$....................2 分

$=8\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}\,y$..4 分

$=4\pi^2$ ....6 分

□

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a\sin^2 x+b\sin x+c & ,x<0\\ 0 & ,x=0\\ x^k\sin\dfrac{1}{x} & ,x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续可微,讨论常数 a,b,c 以及 k 的取值.

解 若函数的导函数是开区间上的连续函数,则称函数在开区间上连续可微. 易见 f 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 内均连续可微,只要讨论 f 在 $x=0$ 处的性质.

由题,$f(x)$ 连续可微,所以 f 本身连续.

当 $k\leqslant 0$ 时,$f(0^+)$ 不存在,所以 $k>0$. ....2 分

而当 $k>0$ 时，我们有 $f(0^-)=c, f(0)=0, f(0^+)=0$，因此 $c=0$. . . . . 3 分

又 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}$ . . . . 4 分

因此，当 $k\leqslant 1$ 时，$f'_+(0)$ 不存在，从而有 $k>1$. 当 $k>1$ 时，$f'_+(0)=0$. 另一方面，$f'_-(0)=b$，从而 $b=0$. . . . . 5 分

进一步，当 $k>1, b=0, c=0$ 时可得

$$f'(x)=\begin{cases}2a\sin x\cos x & ,x<0\\ 0 & ,x=0\\ kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x} & ,x>0\end{cases}$$

当 $k\leqslant 2$ 时，$f'(0^+)$ 不存在，所以 $k>2$. 即 $k>2, b=0, c=0$ 是 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微的必要条件. . . . . 6 分 □

7. 求函数 $f(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}(x^2-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$ 的单调区间与极值.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f(x)=x^2\displaystyle\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t-\int_1^{x^2}t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$ . . . . . . 2 分

$f'(x)=2x\displaystyle\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t+2x^3\,\mathrm{e}^{-x^4}-2x^3\,\mathrm{e}^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$，故 $f(x)$ 的驻点为 $x=0,\pm 1$. . . . . 4 分

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

单调增区间为 $(-1,0),(1,+\infty)$，单调减区间为 $(-\infty,-1),(0,1)$；

极小值为 $f(\pm 1)=0$，极大值为 $f(0)=\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. . . . . 6 分 □

8.(10 分) 求微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\,t}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 的单调区间与极值.

解 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=(\lambda+2)^2(4-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$ . . . . 2 分

$$\lambda=-2:\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}3&-3&3\\3&-3&3\\6&-6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\boldsymbol{r_1}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{r_2}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda=4: \boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-3&-3&3\\3&-9&3\\6&-6&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to \boldsymbol{r_3}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$ ……………5 分

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{r_1}\,\mathrm{e}^{-2t},\boldsymbol{r_2}\,\mathrm{e}^{-2t},\boldsymbol{r_3}\,\mathrm{e}^{4t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}&-\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{4t}\\\mathrm{e}^{-2t}&0&\mathrm{e}^{4t}\\0&\mathrm{e}^{-2t}&2\,\mathrm{e}^{4t}\end{bmatrix}.$$

对应的齐次微分方程组通解为：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}$.

$\boldsymbol{X}(0)\neq\boldsymbol{E}$，计算知 $\boldsymbol{X}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. ……………………………7 分

通解为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(0)\boldsymbol{C}+\int_0^t\boldsymbol{X}(t-\tau)\boldsymbol{X}^{-1}(0)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. ………………8 分

代入公式，得到

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}&-\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{4t}\\\mathrm{e}^{-2t}&0&\mathrm{e}^{4t}\\0&\mathrm{e}^{-2t}&2\,\mathrm{e}^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{bmatrix}$$

$$+\int_0^1\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}&-\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}&\mathrm{e}^{4(t-\tau)}\\\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}&0&\mathrm{e}^{4(t-\tau)}\\0&\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}&2\,\mathrm{e}^{4(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}&-\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{4t}\\\mathrm{e}^{-2t}&0&\mathrm{e}^{4t}\\0&\mathrm{e}^{-2t}&2\,\mathrm{e}^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{4t}\\\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{4t}\\-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{4t}\end{bmatrix}$$

然后将三个矩阵乘开来，化简完毕得 10 分 ……………10 分 □

得分

四、证明题 (共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分)

1. 已知等式两端的两个积分都收敛，且 $a,b>0$，求证：$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}\,t$.

证明 令 $x=\frac{1}{2a}\left(t+\sqrt{t^2+4ab}\right)$，则 $\mathrm{d}\,x=\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}\,t$. ……………2 分

$I=\int_0^{+\infty}f(ax+\frac{b}{x})\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^0+\int_0^{+\infty}\right)f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}\,t$ 4 分

在积分中令 $t=-u$，则

$$I=\frac{1}{2a}\left(\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{u^2+4ab}\right)\frac{\sqrt{u^2+4ab}-u}{\sqrt{u^2+4ab}}\,\mathrm{d}\,u+\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\,\mathrm{d}\,t\right)$$

$=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}\,t$ ....6 分 □

2. 设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$. 求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

证明　由数学归纳法易证 $0<x_n<3$. 又

$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant\dfrac{x_n+(3-x_n)}{2}=\dfrac{3}{2}$ $(n=1,2\cdots)$ ....2 分

所以 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\geqslant\sqrt{x_n\left(3-\dfrac{3}{2}\right)}=\sqrt{\dfrac{3}{2}x_n}\geqslant\sqrt{x_n\cdot x_n}=x_n(n\geqslant 2)$ 4 分

故数列 $\{x_n\}$ 单调增有上界，故收敛. 对 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限，即可知其极限为 $\dfrac{3}{2}$. ....6 分 □

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1, \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$.

(1) 求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$；

(2) 求证：$\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

证明　(1) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，知 $f(0)=0$；

且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$.

故 $\exists a>0, f(a)>f(0)=0$. ....2 分

同理，$f(1)=0, f'(1)=2, \exists b<1, f(b)<f(1)=0$，且 $b\neq a$.

于是 $f(a)f(b)<0$，由零点定理知：

$\exists\xi\in(a,b)\subset(0,1)$，使 $f(\xi)=0$. ....3 分

(2) 构造 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，可知 $F(0)=F(\xi)=0$.

由罗尔定理知：$\exists\xi_1\in(0,\xi), F'(\xi_1)=0,\quad \exists\xi_2\in(\xi,1), F'(\xi_2)=0.$. ....5 分

而 $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]$，故 ξ_1,ξ_2 分别是 $f'(x)-f(x)=0$ 的两个根.

构造 $G(x)=\mathrm{e}^{x}[f'(x)-f(x)]$，则 $G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$ 且满足 Rolle 定理.

故 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1), F'(\eta)=0$.

整理得 $f''(\eta)-f(\eta)=0$. ....6 分 □